**3. Случайные события и операции над ними,**

**элементарные свойства вероятности**

Множество , состоящее из *всех* *элементарных случайных исходов*, в теории вероятностей называют *достоверным событием*. Вероятность события равна 1,

,

то есть, она принимает наибольшее возможное значение, поскольку это событие происходит всегда. Элементарные исходы, составляющие множество , будем обозначать малыми буквами *ω;* если множество состоит из конечного числа элементов, , то обозначает это число, .

Случайное событие есть подмножество множества : . Если множество конечно, то любое его подмножество можно считать случайным событием. Пустое множество (множество, не содержащее ни одного элемента) также считается случайным событием; ему присваивается вероятность 0

.

Над случайными событиями можно совершать обычные операции, определенные для множеств. Объединение событий *A* и *B*, обозначаемое

,

состоит из элементарных исходов, принадлежащих хотя бы одному из множеств *A* или *B*: событие наступает, когда происходит либо событие *A*, либо *B* (хотя бы одно из них – то есть, объединение это сумма событий).

Пересечение событий *A,B* (совместное наступление *A* и *B*) обозначается

,

состоит из элементарных исходов, принадлежащих обоим множествам *A* и *B*: событие наступает, когда происходит и событие *A* и *B*. Если пересечение событий *A,B* является пустым множеством (совместное наступление *A* и *B* невозможно),

,

то события *A,B* называются несовместными.

Дополнение события *A* (множество тех элементов *ω*, которые не входят в *A*)

=

называется противоположным событием (если не наступило событие *A*, значит наступило ). Иногда при выводе формул удобно использовать операцию разность событий:

.

Часто бывают полезными соотношения двойственности:

Применим теперь эти обозначения и операции чтобы вывести свойства вероятности, которые очевидны для рассмотренных ранее классического и геометрического определения вероятности. Для несовместных событий *A* и *B* () имеет место формула сложения вероятностей:

то есть, вероятность суммы событий равна сумме вероятностей – свойство аддитивности вероятности. Действительно, для классического определения вероятности из следует

откуда

Аналогично это свойство аддитивности получается для геометрического определения вероятности.

Применяя аддитивность к паре событий *A* и , учитывая , получаем

фактически это свойство вероятности мы уже использовали ранее при решении Примеров 1.5 и 2.1.

Для двух произвольных событий *A* и *B* можем записать

представив каждое из них в виде суммы пары несовместных событий. Применяя свойство аддитивности вероятности, получим равенства

откуда,

Аналогичным образом, представив объединение в виде суммы несовместных событий,

,

применим свойство аддитивности,

,

тогда, подставляя сюда найденные выражения для вероятностей и , получаем формулу включения и исключения:

.

Эта формула справедлива для любых событий. Из нее, в частности, следует, что всегда

Отметим попутно, что если , то (свойство монотонности вероятности), это следует из представления события *B* в виде объединения двух несовместных событий, , которое в данном случае приобретает вид

Можно выразить и вероятность пересечения через вероятности объединений событий:

.

**Замечание**. В литературе по теории вероятностей в формулах с операциями над множествами часто используют “арифметические” обозначения:

, .

Обычно это не создает неясностей, в то же время формулы выглядят удобнее.

**Упражнение**. Обобщить формулу включения и исключения на три события, представив в виде суммы вероятностей событий и их пересечений; по аналогии с последней формулой написать выражение для вероятности в виде суммы вероятностей событий и их объединений.

Для случайных событий можно создавать конструкции, аналогичные тем, что известны в других разделах математики. Например, можно определить расстояние между событиями (метрику в пространстве событий):

Свойства функции показывают, что она действительно является метрикой:

1)

2)

3)

Докажем последнее свойство (неравенство треугольника). В силу монотонности вероятности

суммируя эти неравенства и получаем неравенство треугольника.

**Упражнение 3.1**. Доказать следующие соотношения:

1)

2)

3)

4)